# SÉRIES À TERMES POSITIFS ET INÉGALITÉS

**Dominique Hoareau, domeh@wanadoo.fr**

Références :
– Exercices avec corrigés et commentaires sur le cours, Analyse, P. Meunier, Puf
– Les cahiers de la RMS5, Vuibert supérieur

## 1 Quelques outils

### 1.1 L´inégalité arithmético-géométrique (I.A.G)

**Propriété 1**
*Soit $u_1, u_2, ..., u_n$ $n$ réels strictement positifs. Alors :*

$$\boxed{(u_1u_2...u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{u_1+...+u_n}{n}.}$$

*Preuve* (de Ehlers) : On se persuade qu´il suffit de montrer :

$$\mathcal{P}_n : [u_1, ..., u_n > 0 \quad ; \quad u_1...u_n = 1] \Rightarrow u_1 + ... + u_n \geqslant n,$$

et on procède par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, le résultat est trivial. On suppose la propriété vraie au rang $n$. Soit $u_1, ..., u_{n+1}$ strictement positifs tels que $u_1...u_{n+1} = 1$. Quitte à renuméroter, on peut supposer $u_1 \geqslant 1$ et $u_2 \leqslant 1$. Avec $(u_1 - 1)(u_2 - 1) \leqslant 0$, on a : $u_1u_2 + 1 \leqslant u_1 + u_2$. On applique alors $\mathcal{P}_n$ aux réels $u_1' = u_1u_2, u_2' = u_3, ..., u_n' = u_{n+1}$ ; $u_1u_2 + u_3 + ... + u_{n+1} \geqslant n$, donc

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n+1} \geqslant u_1u_2 + 1 + u_3 + ... + u_{n+1} \geqslant n + 1.$$

*Remarque* : L´I.A.G appliquée aux réels strictement positifs $\frac{1}{u_1}$, ..., $\frac{1}{u_n}$ donne : $0 < \frac{1}{(u_1...u_n)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}}{n}$ et permet de comparer les moyennes géométrique et harmonique :

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}} \leqslant (u_1...u_n)^{\frac{1}{n}}\ .}$$

### 1.2 Le lemme de Césaro

**Propriété 2**
(1) *On considère une suite $(a_n)$ de réels strictement positifs. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :*

1. *La série à termes positifs $\sum a_n$ diverge, c-à-d $A_n = a_1 + ... + a_n$ tend vers $+\infty$.*
2. *Pour toute suite réelle $(u_n)$ admettant une limite $L$ (finie ou non) dans $\overline{\mathbb{R}}$, la suite $\left(\frac{a_1u_1+...+a_nu_n}{a_1+...+a_n}\right)$ tend aussi vers $L$.*

(2) *Lemme de l´escalier : Si une suite de réels $(u_n)$ verifie : $u_{n+1} - u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(\frac{u_n}{n})$ tend aussi vers $l$.*

$(1 \Rightarrow 2)$ : Si la suite $(u_n)$ converge vers $L \in \mathbb{R}$, pour $\varepsilon > 0$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > N \quad | u_n - L | \leqslant \varepsilon$. Pour $n > N$, on pose : $\Delta_n = \mid \frac{a_1u_1+...+a_nu_n}{a_1+...+a_n} - L \mid = \mid \frac{a_1(u_1-L)+...+a_n(u_n-L)}{a_1+...+a_n} \mid$ . On a :

$$\Delta_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{a_1+...+a_n}\sum_{k=1}^{N} | a_k(u_k - L) |}_{K} + \underbrace{\frac{1}{a_1+...+a_n}\sum_{k=N+1}^{n} a_k | u_k - L |}_{\leqslant \frac{a_{N+1}+...+a_n}{a_1+...+a_n}\varepsilon \leqslant \varepsilon}.$$

Puisque $(A_n = a_1 + ... + a_n)$ tend vers $+\infty$, on choisit à bon droit $N_1 > N$ tel que : $\forall n > N_1 \quad \frac{K}{a_1+...+a_n} \leqslant \varepsilon$.
Pour $n > N_1$, clairement : $\Delta_n \leqslant 2\varepsilon$.
On suppose à présent : $L = +\infty$. Pour $A > 0$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > N \quad u_n \geqslant A$.
On a : $\frac{a_1u_1+...+a_nu_n}{a_1+...+a_n} \geqslant \frac{\sum_{k=1}^N a_ku_k}{a_1+...+a_n} + \frac{a_{N+1}+...+a_n}{a_1+...+a_n}A$. La suite $(A_n)$ tend vers $+\infty$ donc

- Avec $\frac{a_{N+1}+...+a_n}{a_1+...+a_n} = 1 - \frac{a_1+...+a_N}{a_1+...+a_n}$, on choisit $N_1 > N$ tel que : $n > N_1 \Rightarrow \frac{a_{N+1}+...+a_n}{a_1+...+a_n} \geqslant \frac{1}{2}$.
- On choisit $N_2 > N_1$ tel que $\forall n > N_2 \quad \frac{\sum_{k=1}^N a_ku_k}{a_1+...+a_n} \geqslant -\frac{A}{4}$.

Bilan : $\frac{a_1u_1+...+a_nu_n}{a_1+...+a_n} \geqslant \frac{A}{4}$ dès que $n > N_2$.

$(2 \Rightarrow 1)$ : $(A_n)$ est croissante donc admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$ puisque $A_1 = a_1 > 0$ et $(A_n)$ croît. En considérant la suite $u_1 = 1$, $u_n = 0$ pour $n \geqslant 2$, $(\frac{1}{a_1+...a_n})$ converge aussi vers 0 d´après (2), ce qui donne par unicité de la limite $0 = \frac{1}{l}$. Impossible.

**Application 1**

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \sim \ln n$$

On veut définir deux suites $(a_n)$ et $(u_n)$ telles que :

$$a_1 + ... + a_n = \ln n, \quad a_nu_n = \frac{1}{n}, \quad u_n \to 1.$$

On considère la suite $a_1 = 0$, $a_n = \ln n - \ln(n-1) = \ln(\frac{n}{n-1})$. Pour $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \frac{1}{n\ln(\frac{n}{n-1})}$ et on vérifie que ça marche...

*Exercice* : Montrer que la série $\sum \frac{\frac{1}{n}}{H_n}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy et retrouver la divergence de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n\ln n}$.

Par l´absurde, on choisit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall N \geqslant N_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=N}^{N+p} \frac{\frac{1}{n}}{H_n} < \frac{1}{2} \quad (\star).$$

Or, pour $p \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{n=N_0}^{N_0+p} \frac{\frac{1}{n}}{H_n} = \sum_{n=N_0}^{N_0+p} \frac{H_n - H_{n-1}}{H_n} \geqslant \frac{1}{H_{N_0+p}} \sum_{n=N_0}^{N_0+p} H_n - H_{n-1} = \frac{H_{N_0+p} - H_{N_0-1}}{H_{N_0+p}} = 1 - \frac{H_{N_0-1}}{H_{N_0+p}}.$$

Puisque $(H_n)$ diverge vers $+\infty$, on choisit à bon droit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{H_{N_0-1}}{H_{N_0+p}} \leqslant \frac{1}{2}$. L´inégalité $\sum_{n=N_0}^{N_0+p} \frac{\frac{1}{n}}{H_n} \geqslant \frac{1}{2}$ contredit alors $(\star)$. Enfin, $\frac{\frac{1}{n}}{H_n} \sim \frac{1}{n\ln n} \geqslant 0$, donc par équivalents, $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

*Remarque* : On montre de la même façon : Pour une série à termes strictement positifs $\sum u_n$ qui diverge, la série $\sum \frac{u_n}{U_n}$ diverge aussi, et ce malgré la décroissance de $(\frac{1}{U_n})$ vers 0.

**Application 2**

*"D´Alembert" implique "Cauchy" : Si $l$ est un réel de $\mathbb{R}^{*+}$ et si une suite de réels strictement positifs $(u_n)$ vérifie : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ (condition de D´Alembert), alors la suite $(u_n^{\frac{1}{n}})$ converge vers $l$. (condition de Cauchy)*

Par continuité de la fonction ln, la suite $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ tend vers $\ln l$, donc par Césaro ou le lemme de l´escalier, $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) - \ln(u_{k-1}))$ et $(\frac{1}{n}\ln(u_n))$ convergent vers $\ln l$. Par continuité de la fonction exponentielle, $(u_n^{\frac{1}{n}})$ converge vers $l$.

*Exemple* Pour $n > 0$, on pose : $s_n = \frac{n!}{n^n}$. On a : $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (1 - \frac{1}{n})^n$ donc $(\frac{s_{n+1}}{s_n})$ tend vers $e^{-1}$. De là : $(s_n)^{\frac{1}{n}} \to e^{-1}$, c-à-d :

$$\boxed{(n!)^{\frac{1}{n}} \sim \frac{n}{e}.}$$

### 1.3 Transformation d´Abel avec reste, une première illustration

**Propriété 3**
*Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs. Si la série $\sum \frac{1}{n}u_n$ converge, alors*

- *La suite $(u_n)$ converge en moyenne vers 0. La réciproque est fausse ; Considérer par exemple le terme général $(u_n = \frac{1}{\ln n})$, qui converge et donc converge en moyenne vers 0. Pourtant, la série $\sum \frac{1}{n}u_n$ est une série de Bertrand divergente.*
- *La série $\sum u_1...u_n$ converge.*

Pour $n \geqslant 0$, on pose : $R_n = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{u_k}{k}$. Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{U_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(R_{k-1} - R_k) = \frac{1}{n}[\sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} R_k - R_n.$$

Or $(R_n)$ tend vers 0 et, par Césaro, $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} R_k)$ converge aussi vers 0. D´où le résultat.

Malgré les simplifications massives dans : $\frac{u_1...u_{n+1}}{u_1...u_n} = u_{n+1} \quad (n \geqslant 1)$, la règle de D´Alembert semble inutilisable. En revanche, avec l´I.A.G et la convergence en moyenne de $(u_n)$ vers 0, la règle de Cauchy assure la convergence de $\sum u_1...u_n$.

## 2 Position des problèmes

Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs non tous nuls. Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$U_n = u_1 + ... + u_n \quad ; \quad v_n = \frac{U_n}{n} = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

Si $(u_n)$ tend vers 0, par le lemme de Césaro, $(v_n)$ tend aussi vers 0, mais moralement moins rapidement que $(u_n)$. Par exemple, si $u_n = \frac{1}{n}$, on a : $v_n = \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$. Aussi, lorsque $\sum u_n$ converge de somme $U > 0$, $\sum v_n$ diverge puisque le terme général positif $v_n = \frac{U_n}{n}$ est équivalent à $\frac{U}{n}$.

1. En revanche, toujours par équivalents, la série à termes positifs $\sum v_n^2$ converge dès que $\sum u_n$ converge. On a mieux :

   **Propriété 4**
   *Inégalité de Hardy : Si $\sum u_n^2$ converge, alors $\sum v_n^2$ converge aussi, et $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.*

2. On suppose toujours $\sum u_n$ convergente. On remplace le terme général $v_n$ (moyenne arithmétique de $u_1$, ..., $u_n$) par $w_n = (u_1...u_n)^{\frac{1}{n}}$ et on s´intéresse à la nature de $\sum w_n$. On gagne en "petitesse" du terme général : $0 \leqslant w_n \leqslant v_n$ par application brutale de l´inégalité arithmético-géométrique, mais le théorème de comparaison pour séries à termes positifs est inopérant puisque la série majorante $\sum v_n$

diverge. Autre "coup d´épée dans l´eau" : Avec $0 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant u_n$, la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge, donc $\sum u_1 ... u_n$ converge aussi (cf supra), donc $(u_1...u_n)$ tend vers 0. À partir d´un certain rang, $0 \leqslant u_1...u_n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant u_1...u_n \leqslant (u_1...u_n)^{\frac{1}{n}}$. Cela se révèle encore insuffisant puisque la série minorante converge.

**Propriété 5**

*Inégalité de Carleman : Si $\sum u_n$ est une série à termes strictement positifs convergente, alors la série $\sum (u_1...u_n))^{\frac{1}{n}}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} (u_1...u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant e \times \sum_1^{\infty} u_n$.*

## 3 Preuves de l´inégalité de Hardy

Rappel des notations : Pour $n \geqslant 1$,

$$U_n = u_1 + ... + u_n \quad ; \quad v_n = \frac{U_n}{n} = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

Pour $N \geqslant 2$, $\sum_{n=1}^{N} v_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{U_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} (\rho_{n-1} - \rho_n) U_n^2$ où $\rho_n = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$. Il vient :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n^2 = \rho_0 U_1^2 - \rho_N U_N^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \rho_n (U_{n+1}^2 - U_n^2) \leqslant \rho_0 U_1^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \rho_n u_{n+1}(U_{n+1} + U_n) \leqslant \underbrace{\rho_0 U_1^2}_{=\frac{\pi^2}{6} u_1 v_1} + \sum_{n=1}^{N-1} 2\rho_n u_{n+1} U_{n+1}.$$

Or : $\rho_n = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{n+1}$, d´où :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leqslant \frac{\pi^2}{6} u_1 v_1 + 4 \sum_{n=1}^{N-1} u_{n+1} v_{n+1} \leqslant 4 \sum_{n=1}^{N} u_n v_n$$

et avec Cauchy-Schwarz :

$$\left( \sum_{n=1}^{N} v_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 4 \left( \sum_{n=1}^{N} u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

d´où la convergence de $\sum v_n^2$ et l´inégalité : $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \leqslant 16 \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$.

*Commentaire* : Quand on étudie la nature d´une série à termes positifs (STP), on a recours en général aux critères de convergence relatifs aux STP, qui relèvent du théorème de la limite monotone. Voici un exemple (rare) où la majoration des sommes partielles d´une STP se fait grâce à une transformation d´Abel.

*Autre preuve* : Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on majore la quantité $\sum_{n=1}^{N} u_n v_n$ grâce à Cauchy-Schwarz, et on la minore en écrivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = U_n - U_{n-1} = n v_n - (n-1) v_{n-1}$. On a d´abord :

$$\left( \sum_{n=1}^{N} u_n v_n \right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} u_n^2 \sum_{n=1}^{N} v_n^2.$$

Pour $n \geqslant 1$, $u_n v_n \geqslant n v_n^2 - (n-1) v_{n-1} v_n \geqslant n v_n^2 - \frac{n-1}{2}(v_n^2 + v_{n-1}^2)$ donc $u_n v_n \geqslant \frac{n+1}{2} v_n^2 - \frac{n-1}{2} v_{n-1}^2$. Il vient : $\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \geqslant v_1^2 + (\frac{3}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2) + (2 v_3^2 - v_2^2) + ... + (\frac{N+1}{2} v_N^2 - \frac{N-1}{2} v_{N-1}^2) = \frac{N+1}{2} v_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} v_n^2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} v_n^2$. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n^2 \sum_{n=1}^{N} v_n^2 \geqslant \left( \sum_{n=1}^{N} u_n v_n \right)^2 \geqslant \frac{1}{4} \left( \sum_{n=1}^{N} v_n^2 \right)^2,$$

et en définitive :

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \geqslant 4 \sum_{n=1}^{N} u_n^2 \geqslant \sum_{n=1}^{N} v_n^2.$$

La suite $(v_n^2)$ est à sommes partielles positives et bornées, donc $\sum v_n$ converge et $4 \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$.

# 4 Preuve de l´inégalité de Carleman

## 4.1 Préliminaire

**Propriété 6**
*Si* $\sum u_n$ *est une série convergente, alors la série de terme général*

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \underbrace{[u_1 + 2u_2 + ... + nu_n]}_{\frac{n(n+1)}{2}\ termes}$$

*converge et sa somme vaut :* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_1^{\infty} u_n$.

*Preuve* : Pour $n \geqslant 1$, on pose : $R_n = \sum_{k \geqslant n+1} u_k$. Pour $N \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}[(R_0 - R_1) + 2(R_1 - R_2) + ... + n(R_{n-1} - R_n)] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}[\underbrace{(R_0 + ... + R_{n-1})}_{\rho_n} - nR_n)]$$

ce qui donne : $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})\rho_n - \sum_{n=1}^{N} \frac{R_n}{n+1} = \rho_1 - \frac{\rho_N}{N+1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}(\rho_n - \rho_{n-1}) - \sum_{n=1}^{N} \frac{R_n}{n+1}$, ou encore : $\sum_{n=1}^{N} a_n = \rho_1 - \frac{\rho_N}{N+1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{R_{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{R_n}{n+1} = \rho_1 - \frac{\rho_N}{N+1} - \frac{R_N}{N+1}$. Lorsque $N$ tend vers $+\infty$, $(\frac{R_N}{N+1})$ tend vers 0 et par Césaro, $(\frac{\rho_N}{N+1})$ converge aussi vers 0. On a montré que $\sum a_n$ converge et sa somme vaut : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \rho_1 = R_0 = \sum_1^{\infty} u_n$.

## 4.2 Retour preuve

L´astuce est d´utiliser l´I.A.G après avoir pondéré les $u_k$ par des coefficients strictement positifs $a_k$ (à choisir judicieusement par la suite) :

$$(u_1 a_1 ... u_n a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(u_1 a_1 + ... + u_n a_n) \quad (\star).$$

On cherche $(a_k)$ de sorte que : $\forall n \geqslant 1 \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = (n+1)^n$. On pose : $a_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} = k(1 + \frac{1}{k})^k$. L´inégalité $(\star)$ donne alors : $w_n = (u_1 ... u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})^k k u_k$. Or on sait que : $\forall k \geqslant 1 \quad (1 + \frac{1}{k})^k \leqslant e$, donc : $0 < w_n = (u_1 ... u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{e}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$. Par convergence de $\sum \left( \frac{1}{n(n+1)}(u_1 + 2u_2 + ... + nu_n) \right)$ (de somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$), la série à termes positifs $\sum w_n$ converge et sa somme vérifie : $\sum_{n=1}^{\infty} w_n \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

# 5 Inégalité de Knopp

Avec l´inégalité de Carleman en poche et la comparaison entre moyenne géométrique et moyenne harmonique :

**Propriété 7**
*Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs convergente. Alors la série de terme général* $x_n = \frac{n}{\frac{1}{u_1} + ... + \frac{1}{u_n}}$ *converge et* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *On peut montrer que :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

On souhaite s´affranchir de l´inégalité de Carleman pour prouver la convergence de $\sum x_n$. (cf cours de J.M Exbrayat pour l´agrégation, Université de Montpellier)

Par commodité, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$a_n = \frac{1}{u_n} \quad ; \quad A_n = a_1 + ... + a_n.$$

Pour $N \geqslant 1$, $\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{A_n} \leqslant \sum_{n=1}^{2N} \frac{n}{A_n} = \sum_{n=1}^{N} (\frac{2n-1}{A_{2n-1}} + \frac{2n}{A_{2n}})$. On range $a_1, ..., a_{2N}$ dans l´ordre croissant en $b_1, ..., b_{2N}$. Pour $1 \leqslant n \leqslant N$, $A_{2n} \geqslant A_{2n-1} \geqslant b_1 + ... + b_{2n-1} \geqslant b_n + ... + b_{2n-1} \geqslant nb_n$. Ainsi, $\frac{2n}{A_{2n}} \leqslant \frac{2}{b_n}$ et $\frac{2n-1}{A_{2n-1}} \leqslant \frac{2n-1}{nb_n} \leqslant \frac{2}{b_n}$. Il vient : $\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{A_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} (\frac{2n-1}{A_{2n-1}} + \frac{2n}{A_{2n}}) \leqslant 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{b_n} \leqslant 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, d´où la convergence de $\sum x_n$ et l´inégalité : $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leqslant 4 \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.